

ΓΥΜΝΑΣΙΟ ΦΙΛΩΤΑ ΦΛΩΡΙΝΑΣ

Η ΧΡΥΣΗ ΤΟΜΗ $\phi=1,618...$ ΚΑΙ ΟΡΙΣΜΕΝΕΣ ΑΠΟ ΤΙΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΗΣ

Συμμετοχή στον 1^ο Πανελλήνιο Διαγωνισμό

«Η Χρυσή Τομή στη ζωή μας»



Σχολικό έτος 2021-2022

Γ Γυμνασίου
Συμμετέχοντες-Συμμετέχουσες

Αναγνωστοπούλου Αναστασία

Αρβανιτάκης Απόστολος

Αριτζάκη Δέσποινα

Βασιλειάδου Αντωνία

Βεράνη Ελένη

Γιαλαμάς Ευάγγελος

Γκιάτα Άντι

Cullhaj Klevis

Διαμαντίδου Παναγιώτα

Εμμανουηλίδου Ραφαήλα-Σοφία

Gjata Sabian

Jevori Denada

Κακλίδης Χρήστος

Κακλίδου Αθανασία

Καλταβερίδης Θεόδωρος

Κανάκη Στέλλα

Καρακάσης Δημήτριος

Καρανάκης Ιωάννης

Κιωκάκης Ιωάννης

Κουντουρατζής Χαράλαμπος

Κουρτπαρασίδου Φαίδρα

Κρητικού Γεωργία

Κωτσίδης Άγγελος

Παπαδοπούλου Σοφία

Παπαφυλάκης Αλέξανδρος

Παπαφυλάκης Κωνσταντίνος

Πέτσι Εμμανουέλα

Τεντζιρίδου Παναγιώτα

Τσέλα Εριάννα

Τσιτλακίδης Ηρακλής

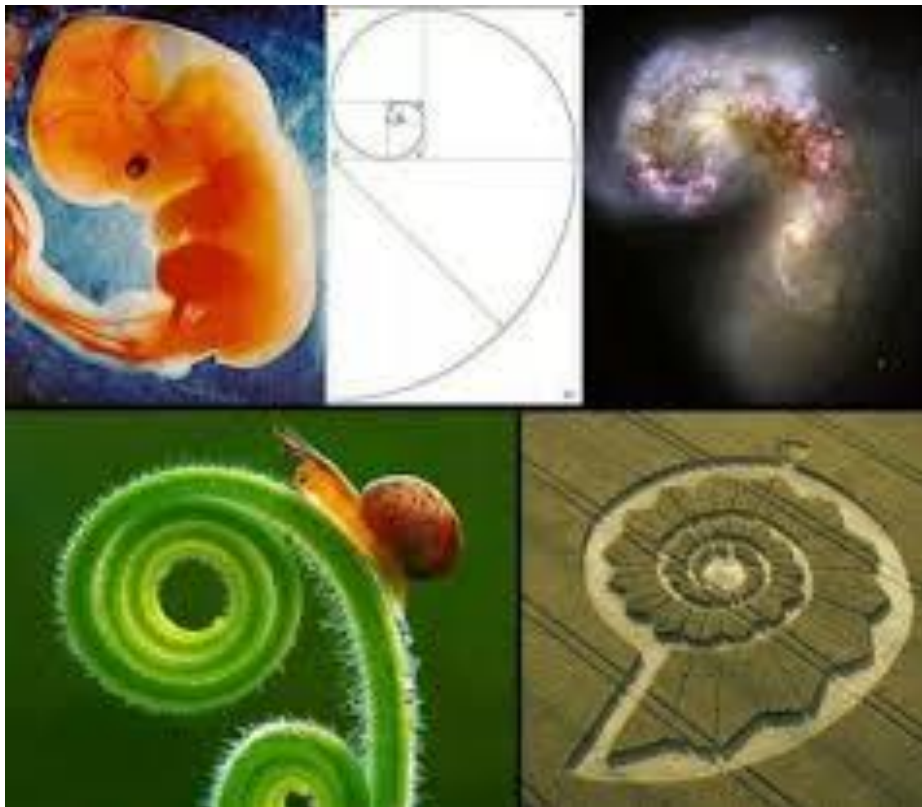
Εκπαιδευτικοί

Μπούτσκου Παναγιώτα ΠΕ03

Διονυσοπούλου Γλυκερία-Παναγιώτα ΠΕ02

Η ΧΡΥΣΗ ΤΟΜΗ $\phi=1,618...$

Ο Χρυσός αυτός αριθμός ονομάζεται και Χρυσός λόγος, Χρυσός κανόνας, Θεϊκή αναλογία... Παρατηρήθηκε αρχικά στη φύση υποδηλώνοντας μία «Θεία» νομοτέλεια. Βρέθηκε σε αναλογίες του ανθρώπινου σώματος, στον αριθμό των κλάδων που αναπτύσσει ένα φυτό, στα πέταλα των λουλουδιών, στα όστρακα, στο σαλιγκάρι, στον αστερία της θάλασσας, στον γενετικό κώδικα, στους φυσικούς κρυστάλλους, στους κυκλώνες, στους σπειροειδείς γαλαξίες,....

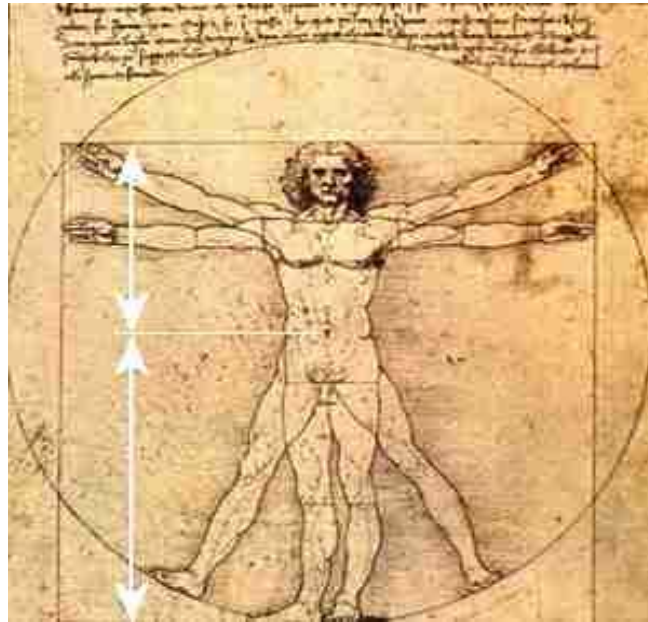


Χρυσή Τομή και ανθρώπινο σώμα

Είναι εντυπωσιακό το πόσο συχνά συναντούμε στις αναλογίες

του ανθρώπινου σώματος τον χρυσό αριθμό $\phi=1,618$

Στον «Άνθρωπο του Βιτρούβιου», το οποίο είναι ένα διάσημο σκίτσο του ζωγράφου Leonardo Da Vinci, γίνεται ένας «διαχωρισμός» που δηλώνει την ύπαρξη του Χρυσού λόγου:



«Άνθρωπος του Βιτρούβιου»

- Αν χωριστεί το ιδανικό ανθρώπινο σώμα σε δύο άνισα τμήματα με σημείο διαχωρισμού τον ομφαλό, το επάνω μέρος είναι μικρότερο από το κάτω. Ο λόγος του κάτω μέρους προς το επάνω είναι $\phi=1.618$
Έχει παρατηρηθεί επίσης ότι:
- Ο λόγος του συνολικού ύψους του ανθρώπινου σώματος προς το ύψος του κάτω μέρους είναι $\phi=1.618$
- Ο λόγος της απόστασης ώμος-άκρες δακτύλων προς την απόσταση αγκώνας-άκρες δακτύλων είναι $\phi=1.618$
- Ο λόγος της απόστασης αγκώνας-καρπός προς την απόσταση καρπός-άκρες δακτύλων είναι $\phi=1.618$
- Κάθε δάχτυλο του χεριού του ανθρώπινου σώματος έχει τρεις φάλαγγες, με μεγαλύτερη τη πρώτη. Αν προσθέσουμε το μήκος δεύτερης και τρίτης φάλαγγας και διαιρέσουμε το άθροισμα με το μήκος της πρώτης, προκύπτει πάλι $\phi=1.618$

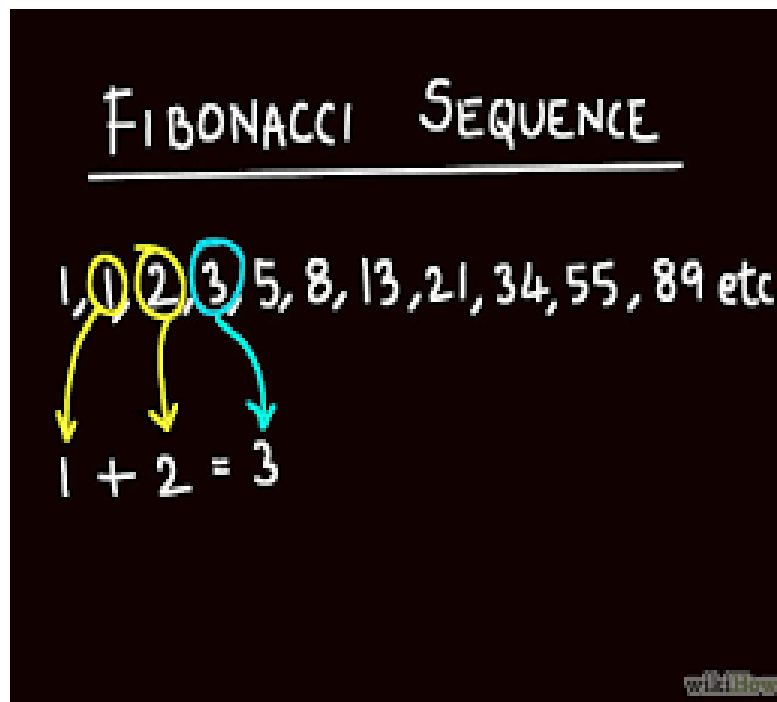
Ακολουθία Fibonacci

Ο διάσημος Ιταλός μαθηματικός Leonardo Fibonacci, έμεινε γνωστός στην ιστορία για την περίφημη **ακολουθία Fibonacci**. Πρόκειται για την παρακάτω σειρά αριθμών:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144,.....

όπου, μετά τον 2^ο όρο, κάθε επόμενος όρος είναι το άθροισμα των δύο προηγούμενων

2=1+1, 3=2+1, 5=2+3, 8=5+3, 13=8+5, 21=13+8, 34=21+13, 55=34+21, 89=55+34,.....



Αξιοθαύμαστη είναι η συχνότητα με την οποία συναντούμε στη φύση την ακολουθία Fibonacci:

Ο αριθμός των πετάλων των λουλουδιών είναι πολύ συχνά ένας αριθμός Fibonacci

Παρατηρούνται λουλούδια με:

1 πέταλο (κρίνος,...)

2 πέταλα (αστράκι, πικραλίδα,...)

3 πέταλα (αγριοκρίνος, τριφύλλια,...)

5 πέταλα (πετούνια, τριαντάφυλλο, πριμούλα, καπουτσίνος,..)

8 πέταλα (κορέοψις)

13 πέταλα (μελία)

21 πέταλα (μαργαρίτα)

34 πέταλα (χρυσάνθεμο, καλέντουλα, ηλίανθος, τριαντάφυλλο)

Οι περισσότερες μαργαρίτες έχουν: **21, 34, 55** ή **89** πέταλα

Ο αριθμός των κλάδων που αναπτύσσονται σε έναν νεαρό βλαστό κάθε μήνα, είναι συνήθως αριθμός Fibonacci

1^{ος} μήνας -**1** κλαδί

2^{ος} μήνας -**1** κλαδί

3^{ος} μήνας -**2** κλαδιά

4^{ος} μήνας -**3** κλαδιά

5^{ος} μήνας -**5** κλαδιά

Ακολουθία Fibonacci και Χρυσή Τομή

Αν διαιρέσουμε κάθε όρο της ακολουθίας Fibonacci με τον προηγούμενό του, παρατηρούμε πως το πηλίκο είναι περίπου ϕ

1/1	= 1
2/1	= 2
3/2	= 1.5
5/3	= 1.666666666
8/5	= 1.6
13/8	= 1.625
21/13	= 1.615384615
34/21	= 1.619047619
55/34	= 1.617647059
89/55	= 1.618181818

Υπάρχει σχέση των όρων της ακολουθίας Fibonacci που τόσο συχνά συναντούμε στη φύση με τη Χρυσή Τομή $\phi=1,618$

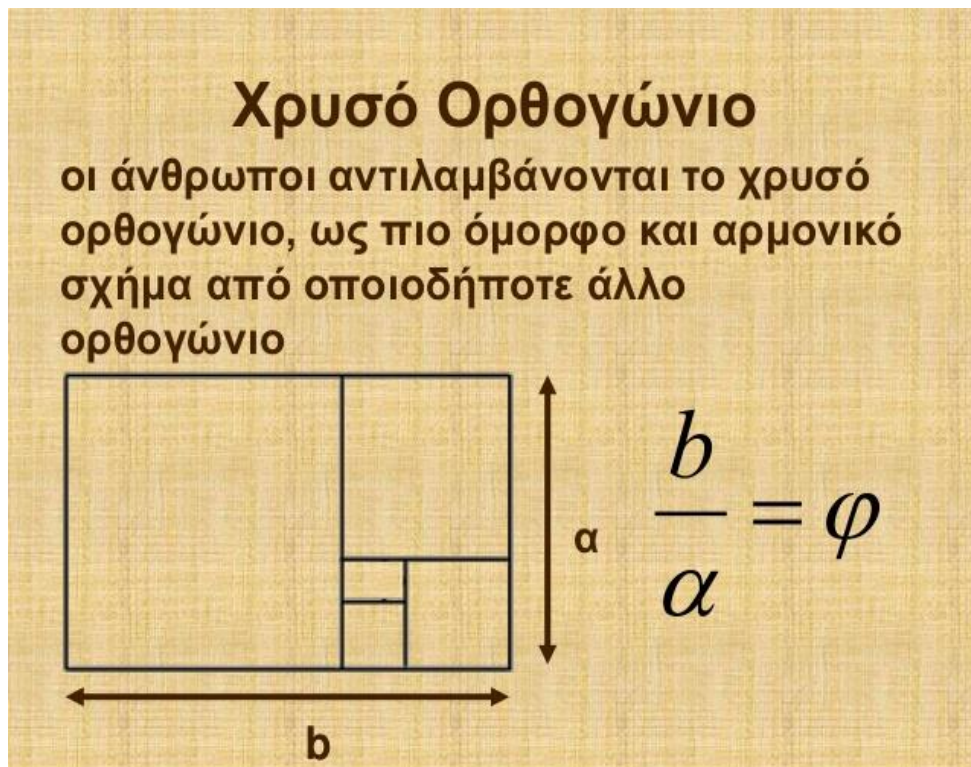
Η Χρυσή Τομή συνδέθηκε με την αρμονία, την αίσθηση του ωραίου, το άριστο αισθητικά αποτέλεσμα.

Χρυσή Τομή και Γεωμετρία

Η Γεωμετρία ασχολήθηκε με τη Χρυσή Αναλογία που τόσο συχνά συναντούμε στη φύση:

- Χώρισε ένα ευθύγραμμο τμήμα σε λόγο $\phi=1,618$.
- Κατασκεύασε «Χρυσά Σχήματα», θεωρώντας τα ως τα πιο όμορφα και αρμονικά μεταξύ των άλλων σχημάτων: Χρυσά Ορθογώνια παραλληλόγραμμα, Χρυσά Τρίγωνα, Κανονικά Πεντάγωνα, όπου συναντούμε Χρυσά Τρίγωνα και τη Χρυσή Τομή.

Στα Χρυσά Ορθογώνια παραλληλόγραμμα, ο λόγος των διαστάσεων είναι $\phi=1,618$

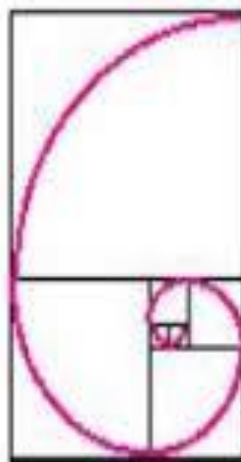
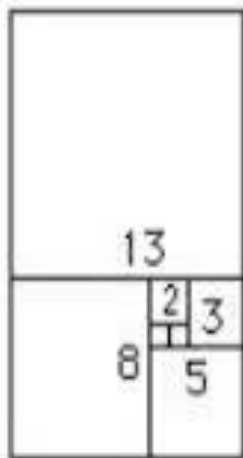


- Χώρισε ένα Χρυσό Ορθογώνιο σε ένα τετράγωνο και ένα μικρότερο Χρυσό Ορθογώνιο και συνεχίζοντας την ίδια διαδικασία δημιουργήθηκαν ολοένα και μικρότερα τετράγωνα και Χρυσά Ορθογώνια...

Τα τετράγωνα, έχουν ως εμβαδά όρους της ακολουθίας Fibonacci.

Κατασκευάζοντας τα τεταρτοκύκλια που περνούν από τις απέναντι κορυφές των τετραγώνων.....προκύπτει το παρακάτω σχήμα, το οποίο ονομάζεται Χρυσή Σπείρα

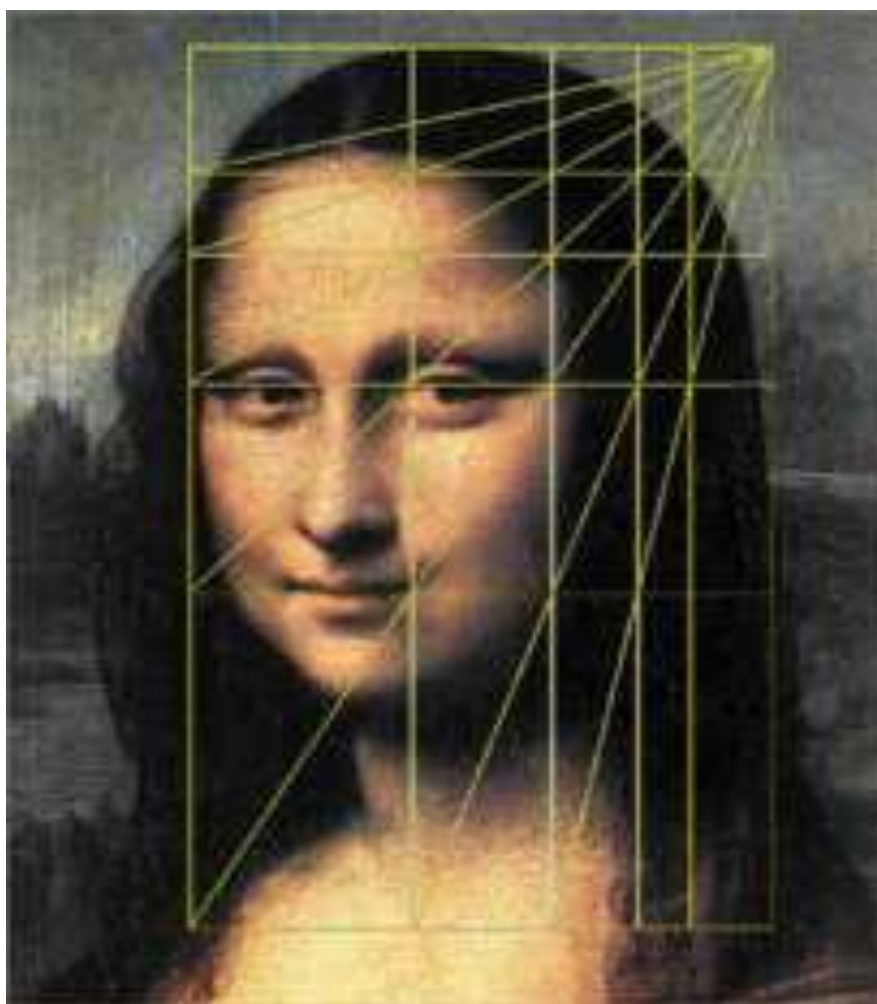
Χρυσή Σπείρα



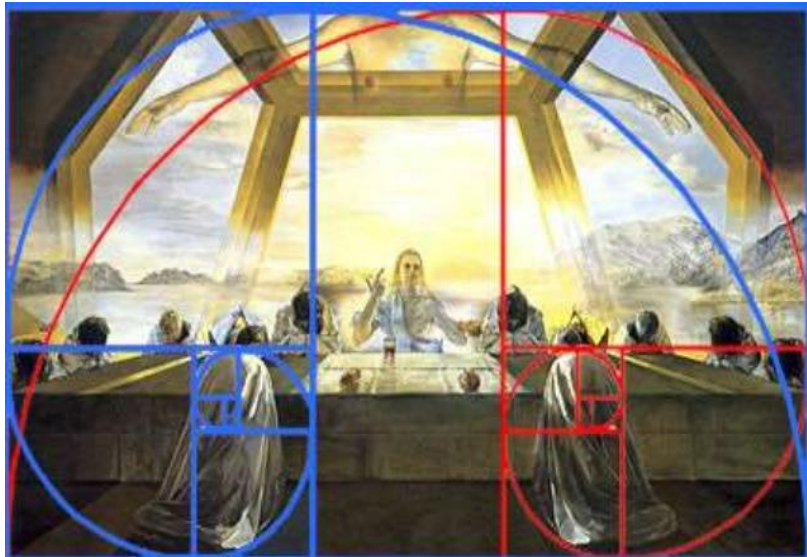
Τέχνη και Χρυσή Τομή

Καλλιτέχνες και αρχιτέκτονες, προσαρμόσαν τα έργα τους ώστε να προσεγγίζουν τη χρυσή αναλογία, προκειμένου να βελτιώσουν αισθητικά το αποτέλεσμα.

Σε διάσημους πίνακες ζωγραφικής όπως «Η Σταύρωση» του Raphael, «Η Αγία Οικογένεια» του Michelangelo, «Το μυστήριο του Μυστικού Δείπνου» του Salvador Dali, η «Mona Lisa» του Leonardo Da Vinci,...χρησιμοποιήθηκαν Χρυσά ορθογώνια, Χρυσά Τρίγωνα, Χρυσές Σπείρες, Χρυσή Πεντάλφα,....



Mona Lisa



Το Μυστήριο του Μυστικού Δείπνου

Στην κατασκευή λαμπρών οικοδομημάτων όπως η Πυραμίδα του Χέοπα, Το ανάκτορο του Φιλίππου στις Αιγές, το αρχαίο θέατρο της Επιδαύρου, το αρχαίο θέατρο της Δωδώνης, ο Παρθενώνας,...χρησιμοποιήθηκε επίσης η Χρυσή Τομή $\phi=1,618$.

Το γράμμα ϕ με το οποίο συμβολίζεται η Χρυσή Τομή, υποστηρίζεται ότι αποδίδεται στο αρχικό του ονόματος του γλύπτη **Φειδία**, ο οποίος χρησιμοποίησε τη Χρυσή Τομή στα έργα του.



Παρθενώνας

Αρχαίο Θέατρο Επιδαύρου

Το αρχαίο θέατρο Επιδαύρου αποτελείται από δύο ζώνες(κυκλικές τοποθετήσεις καθισμάτων σε κατώτερο και ανώτερο επίπεδο) που χωρίζονται από οριζόντιο διάδρομο (διάζωμα)



Η 1η ζώνη (κάτω) αποτελείται από 34 σκαλοπάτια, ενώ η 2^η ζώνη (πάνω) από 21 σκαλοπάτια.

21, 34, 55=21+34 είναι όροι Fibonacci!!!

Αν πάρουμε τους λόγους:

- Σύνολο σκαλοπατιών/Σκαλοπάτια 1^{ης} ζώνης:
 $55/34=1,618=\phi!!!$
- Σκαλοπάτια 1^{ης} ζώνης/Σκαλοπάτια 2^{ης} ζώνης:
 $34/21 = 1,618=\phi !!!$

Αρχαίο Θέατρο Δωδώνης

Το αρχαίο θέατρο Δωδώνης αποτελείται από τρεις ζώνες(κυκλικές τοποθετήσεις καθισμάτων σε τρία επίπεδα) που χωρίζονται από οριζόντιους διάδρομους (διαζώματα)



Η 1η ζώνη (κάτω) αποτελείται από 19 σκαλοπάτια, η 2^η ζώνη (μεσαία) από 15 σκαλοπάτια και η 3^η ζώνη (πάνω) από 21 σκαλοπάτια

$19+15= 34$, $19+15+21=55$

Συναντούμε φανερά και εδώ τους 21, 34, 55 αριθμούς Fibonacci!!!

Αν πάρουμε τους λόγους:

- Σύνολο σκαλοπατιών/(Σκαλοπάτια 1^{ης} ζώνης+ 2^{ης} ζώνης):
 $55/34=1,618=\phi!!!$
- Σκαλοπάτια 1^{ης}+2^{ης} ζώνης/Σκαλοπάτια 3^{ης} ζώνης:
 $34/21 = 1,618=\phi !!!$

Χρυσή Τομή και μουσική

Ο Βόλφραγκ Αμαντέους Μότσαρντ, ένας από τους σημαντικότερους συνθέτες κλασικής μουσικής, προσπάθησε να χρησιμοποιήσει τη Χρυσή Τομή στα έργα του, προκειμένου να πετύχει αρμονία στις μουσικές του συνθέσεις.

Χώρισε τη σονάτα σε δύο μέρη: την **Έκθεση**, όπου έχουμε την εισαγωγή του μουσικού θέματος και την **Ανάπτυξη** και **Επανέκθεση**, όπου το κυρίως θέμα αναπτύσσεται και επαναλαμβάνεται

Χρυσή τομή στις σονάτες Μότσαρντ



Στο πρώτο μέρος της σονάτας ν. 1 η Έκθεση αποτελείται από 38 μέτρα, ενώ η Ανάπτυξη και η Επανέκθεση από 62 μέτρα. Ο λόγος 62/38 προσεγγίζει τη χρυσή τομή φ.

$$\frac{62}{38} = 1.63 \approx \phi$$

38 και 62 είναι οι ακέραιοι στο διάστημα 1-100, των οποίων ο λόγος προσεγγίζει καλύτερα τη χρυσή τομή.

Χρυσή τομή στις σονάτες Μότσαρντ

Sonate 16 in C major
Sonata facile
W. A. Mozart
K. 545

Allegro

Creative Commons Attribution-ShareAlike 3.0

Στη σονάτα ν.16 παρατηρούμε συνολικά 73 μέτρα, 28 στην Έκθεση και 45 στην Ανάπτυξη και Επανάθεση

$$\frac{45}{28} = 1.607 \approx \phi$$

74

Χρυσή Τομή και ποίηση

Η Χρυσή Τομή και η ακολουθία Fibonacci συναντώνται σε διάφορα λογοτεχνικά είδη, μεταξύ των οποίων, και στην Ποίηση:

Ορισμένοι μελετητές της λογοτεχνίας υποστηρίζουν ότι η Χρυσή Τομή χρησιμοποιήθηκε από τον Όμηρο στα ηρωικά έπη της Αρχαίας Ελληνικής Γραμματείας: Ιλιάδα και Οδύσσεια, τον 8^ο αιώνα π.Χ.

Υποστηρίζεται επίσης ότι η Χρυσή Τομή χρησιμοποιήθηκε από τον Ρωμαίο ποιητή Βιργίλιο στη σύνθεση του επικού ποιήματος Αινειάδα, στα τέλη του 5ου αιώνα π.Χ.

Τον 12ο αιώνα μ.Χ. σε δείγματα σανσκριτικής ποίησης παρατηρήθηκε ότι σε ένα στίχο με συγκεκριμένη διάρκεια χρονικών μονάδων, ο αριθμός των δυνατών συνδυασμών βραχειών και μακρών συλλαβών που χρησιμοποιήθηκαν για να παραχθεί, συνήθως ήταν όρος της ακολουθίας Fibonacci.

Μεταγενέστερα ποιήματα σχετικά με το έργο του σημαντικού Ρώσου λογοτέχνη Αλεξάντρ Σεργκέγεβιτς Πούσκιν (1799-1837), παρατηρήθηκε ότι αποτελούνταν συνήθως από 5 ή 8 ή 13 ή 21 γραμμές. Οι παραπάνω αριθμοί αποτελούν αντίστοιχα τον 5^ο, 6^ο, 7^ο, 8^ο όρο της ακολουθίας Fibonacci.

Παράδειγμα εφαρμογής της Χρυσής Τομής και της ακολουθίας Fibonacci στη σύγχρονη ποίηση έχουμε στο τραγούδι Lateralus του hard-rock συγκροτήματος Tool, το οποίο κυκλοφόρησε το 2001. Γίνεται μία τεχνική προσπάθεια κατά τη δημιουργία των στίχων, ώστε το πλήθος των συλλαβών τους να είναι όροι της ακολουθίας Fibonacci. Το τραγούδι χωρίζεται σε τμήματα όπου ο αριθμός συλλαβών των στίχων αποτελούν όρους της ακολουθίας Fibonacci, οι οποίοι είναι τοποθετημένοι σε αύξουσα ή φθίνουσα τάξη. Η Χρυσή Τομή ακολουθείται κατά την εναλλαγή του ρυθμού, στην χρονική στιγμή μετά την έναρξη που μπαίνουν τα φωνητικά, ακόμη και στην αρχική ονομασία του τραγουδιού που ήταν 9-8-7, τριψήφιος που αριθμητικά ισούται με τον 16^ο όρο της ακολουθίας Fibonacci. Στους στίχους του τραγουδιού επίσης αναφέρεται συνεχώς η «σπείρα Fibonacci». Η μεταφορική ερμηνεία του τραγουδιού σχετίζεται με την ιδέα ότι η ζωή και η εμπειρία πρέπει να «ρέουν», να αναπτύσσονται και να επεκτείνονται ελεύθερα, όπως συμβαίνει και με τη σπείρα Fibonacci.

Στο γυμνάσιο Φιλώτα Φλώρινας το σχ. έτος 2021-2022 υλοποιήθηκε project με στόχο την εφαρμογή της Χρυσής Τομής στην ποίηση. Δημιουργήθηκαν πρωτότυπα ποιήματα κατά τέτοιον τρόπο ώστε το πλήθος των συλλαβών στους στίχους αυτών, να είναι όροι της ακολουθίας Fibonacci. Τα παιδιά ξετύλιξαν τη φαντασία και τη δημιουργικότητά τους, άφησαν ελεύθερο το συναίσθημά τους και ο αναγνώστης μπορεί να διακρίνει κατά πόσο, μέσω της χρησιμοποιούμενης τεχνικής επιτεύχθηκε ρυθμός, αρμονία και μουσικότητα.

Ποιος (1 συλλαβή)

Να (1 συλλαβή)

Ξέρει (2 συλλαβές)

Για κάτι (3 συλλαβές)

Που κανείς άλλος (5 συλλαβές)

Δεν γνωρίζει μέχρι τώρα (8 συλλαβές)

Και δεν έχει γραφτεί ούτε στην επιστήμη (13 συλλαβές)

Ούτε στην ιστορία, ούτε στη μνήμη της φύσης ή και των ανθρώπων (21 συλλαβές)

Fibonacci Sequence

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987 ...



Μα

Ποιος

Θα πει

Αλήθειες

Γιατί τα ψέματα

Που όλοι λένε με τρόπο

Χωρίς τύψεις μα με υπερηφάνεια

Ποιος θα' ναι αυτός που θα κάνει την αρχή; Καθαρά και τίμια να πει...



Δικτυογραφία για τη Χρυσή Τομή

- www.p-theodoropoulos.gr/ergasmath/math-gymntegeas-xrysitomi.pdf
- <https://docplayer.gr/10150329-E-r-g-a-s-i-a-thema-akoloythia-fibonacci.html>
- <https://docplayer.gr/41063908-l-hrysi-tomi-kai-o-hrysos-arithmos-f.html>
- <http://ninakianas.wixsite.com/everythingismath/the-golden>
- <https://www.slideshare.net/magieA/ss-46645441>
- <https://www.scribd.com/document/409906827/HXrysiTomi>
- <https://slideplayer.gr/slide/2917786/>
- <https://www.slideshare.net/azourna/f02-analogies>
- <https://www.slideshare.net/natasaliri/ss-44510303>
- <http://www.papadakismanolis.gr/index.php?lid=1&mid=13&bid=6>
- <http://www.dodoni.gr/to-theatro>
- http://3lyk-chalandr.att.sch.gr/autosch/joomla15/images/ergasies/B_TETR_1_2_13/numberf_doc.pdf
- <https://www.newsbeast.gr/weekend/arthro/2236857/ta-iera-trigona-tis-ellinikis-archeotitas-ke-i-kala-krimmeni-simasia-tous>
- <http://39gym-athin.att.sch.gr/autosch/joomla15/images/fysikh/%CE%97%20%CE%A7%CE%A1%CE%A5%CE%A3%CE%97%20%CE%A4%CE%9F%CE%9C%CE%97%20-%2039%CE%BF%20%CE%93%CE%A5%CE%9C%CE%9D%CE%91%CE%A3%CE%99%CE%9F%20%CE%91%CE%98%CE%97%CE%9D%CE%91%CE%A3%20-%209%20%CE%B1%CF%80%CF%8C%2010.pdf>
- [https://el.m.wikipedia.org/wiki/Ο_Μυστικός_Δείπνος_\(Ντα_Βίντσι\)](https://el.m.wikipedia.org/wiki/Ο_Μυστικός_Δείπνος_(Ντα_Βίντσι))
- https://el.m.wikipedia.org/wiki/Λεονάρντο_ντα_Βίντσι
- http://49lyk-athin.att.sch.gr/MERH_THEATROY.htm
- <https://www.ploumistos.com>
- <https://kerchtt.ru/el/zolotoe-sechenie-znachenie-zolotoe-sechenie-v-dizaine/>
- <https://www.youtube.com/watch?v=uOHkeH2VaE0>
- https://www.youtube.com/watch?v=FwmoB7Wf7_Y
- <https://www.youtube.com/watch?v=mBQTO9X2H5w>

